

Sannsynlighet



Sannsynlighet

- Sannsynlighet spiller en stor rolle på en rekke felter i livene våre.
- Når du skal avgjøre hva du bør gjøre i ulike situasjoner, vurderer du sannsynligheten for at noe kan skje.



Hvilken vei bør jeg kjøre for å unngå kø? Er det sannsynlig at jeg blir oppdaget hvis jeg jukser? Hva bør jeg gjøre for å vinne dette sjakkpartiet?

Sannsynlighet, også kalt sannsynlighetsvurderinger, spiller en stor rolle på en rekke felter i livene våre. I hverdagen forbinder de fleste av oss sannsynlighet med hvor stor sjansen er for at noe skal skje. Dette kan dreie seg om nærmest enhver situasjon hvor vi står ovenfor et valg. Hvilken vei vi bør kjøre for å unngå kø? Hvor stor er sjansen for å bli tatt på fersk gjerning dersom jeg jukser på en prøve på skolen? Hvilket trekk bør jeg foreta for å vinne dette sjakkpartiet? Stadig foretar vi analyser, og ut fra vår egen erfaring og kunnskap (og i mange tilfeller også moral) får vi et visst grunnlag slik at vi kan avgjøre hva som gagnar oss best i ulike situasjoner.

Sannsynlighet

- På 1500-tallet levde det en italiener som het Giralamo Cardano.
- Cardano, som var professor i matematikk, var stadig i pengenød.

For å skaffe seg penger, regnet Cardano seg fram til systemer for sannsynlighet i spill.



Girolamo Cardano het en italiener som levde på 1500-tallet. Cardano var en dyktig matematiker, han var sågar professor i faget, men hans liv var også preget av stadige pengeproblemer. Det fortelles at Cardanos økonomiske vanskeligheter gjorde at han stadig vekk måtte ty til ulike former for gambling for å holde hodet over vannet. Når vi tenker på gambling og pengespill er det lett å se for seg at dette er den sikre vei til ruin, men for Cardano fortonte det seg annerledes. Hans matematiske kunnskaper gjorde at han klarte å komme fram til systemer for utregning av sannsynlighet i spill. Han var dermed blant de første som kom med systematiske behandlinger omkring sannsynlighet. Dette skrev Cardano om i en bok som ble utgitt lenge etter at han var død. At han også beskrev ulike metoder for juks, hører med til historien.

Sannsynlighet

- I dag er sannsynlighetsvurderinger viktig på en rekke områder.
- Innenfor økonomi, politikk, spill og vitenskap tas det beslutninger på bakgrunn av sannsynlighet.

Forsikringsselskaper beregner hva du må betale i forsikringspremie ut fra sannsynligheten for at en skade skal skje.



Innenfor næringsliv og politikk danner sannsynlighetsvurderinger grunnlag for avgjørelser som påvirker oss. Forsikringsselskaper fastsetter forsikringspremier ut fra hvor sannsynlighet. Premien på livsforsikring vil være lavere for en ung enn for en gammel person, men også faktorer som ens helse vil spille inn. Skal man forsikre bilen, vil en voksen og erfaren sjåfør med god historikk komme bedre ut enn en ung og uerfaren sjåfør.

Når politiske beslutninger blir tatt, foretar man sannsynlighetsvurderinger for å finne ut hva som er mest hensiktsmessig og hva som gir mest gevinst. Også områder som økonomi, spill, etterforskning, medisin, vitenskap og forskning berøres også av vurderinger og beregninger som er knyttet opp mot sannsynlighet.

Sannsynlighet

- Sannsynlighet handler altså om hvor stor sjanse det er for ulike utfall i forskjellige situasjoner.
- Hvor stor tror du sjansen er for å få sju rette i lotto?
- Hvor sannsynlig er det at du klarer å få fem seksere på ett kast når du spiller yatzy?

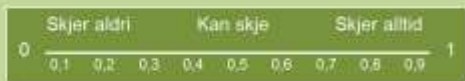


Matematikken kan hjelpe oss med å beregne sannsynlighet nøyaktig.

Sannsynlighet handler om hvor stor sjanse det er for ulike utfall i forskjellige situasjoner. Til daglig bruker vi vår sunne fornuft og vår forståelse av virkeligheten når vi skal vurdere hvor stor sjanse det er for noe skal hende. Når du spiller lotto, vet du sikkert at sjansen for å få sju rette er forsvinnende liten. Spiller du yatzy, vet du at sjansen for å få fem seksere i ett kast også krever mye flaks. Vi har altså en innebygd forståelse av sannsynligheten for ulike utfall, selv om vi ikke alltid kan tallfeste den konkret. Bruker vi derimot matematikken, kan vi prøve å beregne hvor stor sjanse det er for at et bestemt utfall skal forekomme. Vi kaller det gjerne for sannsynlighetsberegning.

Sannsynlighet

- Innenfor matematikken bruker vi tallene 0 og 1 for å si noe om sannsynlighet.
- 0 betyr at en begivenhet aldri kan skje.
- 1 betyr at en hendelse helt sikkert vil skje.
- Alt mellom 0 og 1 kan skje.



Dommeren kaster et pengestykke i luften for å avgjøre hvilket lag som skal ta avspark. Hva er sannsynligheten for at det røde laget får starte med ballen?

Når vi snakker om sannsynlighet innenfor matematikken, opererer vi med tallene 0 og 1. I denne sammenhengen betyr 0 at en bestemt begivenhet aldri skjer, den kan rett og slett ikke forekomme. 1 betyr på sin side at en bestemt hendelse helt sikkert vil skje. Mellom 0 og 1 finnes det et ulike grader av sannsynlighet for at noe skal skje. Alt mellom 0 og 1 kan altså skje, og dette kan uttrykkes som desimaltall, brøk eller prosent.

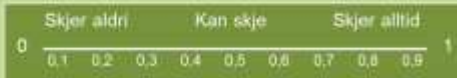
For å konkretisere hvordan vi skriver sannsynlighet rent matematisk, ser vi for oss en fotballkamp. Dommeren skal sette i gang kampen, og for å avgjøre hvilket lag som skal ta avspark, tar han fram et pengestykke. Alle vet at pengestykket har to sider som vi kaller kron og mynt, og nå ber dommeren de to lagenes kapteiner om å velge hver sin side. Deretter kaster dommeren pengestykket i luften før han igjen tar imot det. Det er to mulige utfall av kastet, kron og mynt. Sannsynligheten for at det blir kron er en til to, og det samme gjelder selvsagt for at det blir mynt. Rent matematisk regner vi sannsynligheten ved å dele antall gunstige utfall på antall mulige utfall. Hver kaptein har ett gunstig utfall og to mulige utfall. Regnestykket blir med det $1:2 = 0,5$. Det er dermed 50 prosent sannsynlighet for hvert utfall.

Sannsynlighet

- Når et pengestykke kastes i luften, kan det lande på mynt- eller kronesiden.
- Vi sier derfor at det er to mulige utfall av kastet.
- For hvert av lagene finnes det ett gunstig utfall.

Vi regner ut sannsynlighet:

$$\frac{\text{Antall gunstige utfall}}{\text{Antall mulige utfall}} = \frac{1}{2} = 0,5$$



Fortsettelse fra forrige side.

Sannsynlighet

- Hva er sannsynligheten for at du får 6 dersom du kaster en terning?



$$\frac{\text{Antall gunstige utfall}}{\text{Antall mulige utfall}} = \frac{1}{6} = 0,16$$

Hvor mange seksere er det sannsynlig at du får dersom kaster terningen hundre ganger?

Terninger er fine å bruke dersom vi skal beregne sannsynlighet. Dersom man har en terning og skal forsøke å få 6, skjønner de fleste instinktivt at det er 1/6 sjanse for at man oppnår det på ett kast. Som desimaltall blir det 0,16. Hvis vi tenker oss sannsynlighetslinjen som gikk fra 0 til 1, ser vi at sannsynligheten for å få 6 på et kast ikke er veldig stor, men det kan naturligvis skje, noe alle har opplevd. Et enkelt forsøk for å se om beregningen holder mål i virkeligheten er kaste en terning hundre ganger. Antallet seksere blir neppe veldig langt unna 16.

Sannsynlighet

- Hva er sannsynligheten for å få 5 eller 6 på ett terningkast?



$$\frac{\text{Antall gunstige utfall}}{\text{Antall mulige utfall}} = \frac{2}{6} = 0,33$$

- Hvor stor sannsynlighet er det for at du får 4, 5 eller 6 dersom du kaster en terning?



$$\frac{\text{Antall gunstige utfall}}{\text{Antall mulige utfall}} = \frac{3}{6} = 0,5$$

Hvor stor sannsynlighet er det at vi får 5 eller 6 på terningen? Dette kan vi ganske enkelt regne ut ved å skrive $1/6 + 1/6 = 2/6$. Likeledes kan vi regne ut sannsynligheten for å få 4, 5 eller 6 når vi kaster terningen. Svaret blir logisk nok $1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6$. Sannsynligheten er altså 50 %, eller sagt med desimaltall, 0,5. Dersom du skal beregne sannsynligheten for å få 1, 2, 3, 4, 5 eller 6, blir svaret $6/6$, altså 100 % eller 1. Det vil helt sikkert skje at du får et av de nevnte tallene. Med dette forstår vi at når ordet *eller* dukker opp i sannsynlighetsberegninger, skal vi legge sammen sannsynligheter for å finne svaret.

Sannsynlighet

- Hvordan beregner vi sannsynlighet for to terninger?
- Vi må gange sannsynligheten for de to terningene med hverandre.

Tenk deg at du spiller yatzy. Du har igjen to terninger, og du må få 6 på hver av dem. Hvor sannsynlig er det at du klarer det?

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0,02$$



Noen ganger skal vi beregne sannsynlighet på to terninger. Hvis vi skal forsøke å få to seksere på et kast, altså 6 og 6, må vi gange sannsynligheten for de to terningene med hverandre. Det er $1/6$ sjanse for å få 6 på hver av terningene. Vi får dermed følgende regnestykke: $1/6 \times 1/6 = 1/36 = 0,027$. Men hva om vi har fem terninger. Hvor stor er sannsynligheten for å få fem seksere på ett kast? $1/6 \times 1/6 \times 1/6 \times 1/6 \times 1/6 = 1/7776$.

Sannsynlighet

- Et par har tre barn.
- Paret vil at du skal gjette på barnas kjønn.
- Hvilket kjønn tror du det første barnet har?
- Tror du det andre barnet er en gutt eller ei jente?
- Tipp også det tredje barnets kjønn.



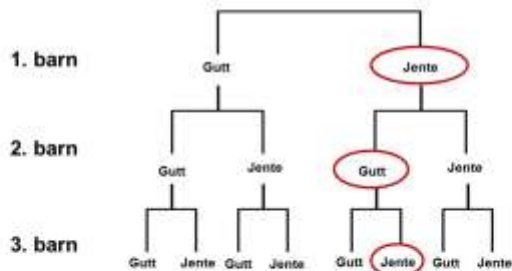
Hvor sannsynlig er det at du tipper rett på alle tre barna?

Se for deg at et par har tre barn. Du får ikke vite hvilket kjønn hvert enkelt barn har, foreldrene vil at du skal gjette kjønn på deres første- andre- og tredje barn. Hvor stor er sannsynligheten for at du treffer med tipset på det første barnet? Hva er sjansen for at du har rett på de to første? Hvor sannsynlig er det at du tipper rett på alle tre?

Be gjerne elevene gjette. Spør: Hvor mange tror det første barnet er a) gutt b) jente. Gjenta det samme for de to neste barna. På neste lysbilde skal vi se at et valgtre kan gi en enkel illustrasjon av dette eksemplet.

Sannsynlighet

Det første barnet er ei jente, det andre en gutt og det tredje ei jente.



Hvor sannsynlig er det at du gjettet riktig? $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Vi kan bruke et valgtre (sannsynlighetstre) for å illustrere eksemplet på forrige. Et valgtre gir oss en visuell oversikt over antall mulige utfall og antall gunstige utfall. Svaret er naturlig nok at sjansen for å tippe rett på hvert av barna er $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/8$. Det finnes altså sju andre kombinasjoner som ikke var riktig:

- Gutt – gutt – gutt
- Gutt – gutt – jente
- Gutt – jente – gutt
- Gutt – jente – jente
- Jente – gutt – gutt
- Jente – jente – gutt
- Jente – jente – jente

Dersom elevene i klassen tippet barnas kjønn, bør hver 8. elev rent statistisk sett hatt flaks og kommet fram til rett svar. Imidlertid vil selvsagt en gruppe elever være et for lite utvalg til at vi kan si at dette skjedde blant dine elever.

Sannsynlighet

Hva er sannsynligheten for å få sju rette i Lotto?



$$\frac{\text{Antall gunstige utfall}}{\text{Antall mulige utfall}} = \frac{1}{5\,379\,616}$$

Hvor stor er egentlig sjansen for å få sju rette i lotto? Hvor sannsynlig er det at du skal stikke av med førstepremien? Svaret er $\frac{1}{5\,379\,616}$. Når du leverer inn lykkerekka di, kan du tenke på at det fremdeles er 5 379 615 kombinasjoner du ikke har levert inn. Sannsynligheten for sju rette er med andre ord forsvinnende liten.

Sannsynlighet

- Tenk deg at du reiser med toget fra Oslo til Trondheim.
- Du har bind for øynene og en ball i hånden.
- Et eller annet sted mellom de to byene står det ei bøtte.
- Forsøk å kaste ballen i bøtta.



Sannsynligheten for at du treffer bøtta er faktisk litt større enn sjansen for å vinne i Lotto når du leverer inn ei rekke.

En vanlig analogi som er brukt i forbindelse med Lotto og sannsynlighet handler om at du befinner deg på tog som kjører fra Oslo til Trondheim. Du har en ball i hånden, og du vet at en eller annen plass underveis står det ei bøtte. Din oppgave blir å gi beskjed når toget skal stanse slik at du kan kaste ballen i bøtta. Problemet er bare det at du har bind for øynene, så du kan verken se bøtta eller sikte. Du må rett og slett bestemme deg for et tidspunkt når ballen skal kastes.

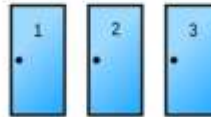
Forklaringen på denne historien er som følger. Det er i overkant av 500 kilometer mellom Oslo og Trondheim, altså noe mer enn 5 000 000 desimeter. Dette medfører at det er omtrent like mange desimeter mellom de to byene som det er mulig kombinasjoner i Lotto. Og når vi vet at bøtta er større enn en desimeter, forstår vi at sjansen for å treffe med kastet faktisk er noe større enn å prikke inn sjuern.

Sannsynlighet

I et amerikansk TV-show skulle deltakerne velge en dør.

Bak en av dørene befant det seg en bil.

Bak de to andre dørene befant det seg geiter.

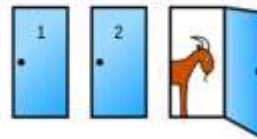


Når deltakeren hadde valgt dør, åpnet programlederen (som visste hvor bilen var) en annen dør. Her stod det ei geit.

Programlederen stilte så deltakeren spørsmålet:

- Vil du bytte dør?

Bør deltakeren bytte dør eller holde på sitt opprinnelige valg?



Har du hørt om Monty Hall-problemet. Dette er et matematisk problem som bygger på sannsynlighet i et amerikansk TV-show.

Tenk deg at du er deltager i dette showet. Oppgaven din er enkel. Du står foran tre dører. Bak en av dørene skjuler det seg en bil, bak de to andre skjuler det seg geiter. Du skal velge en dør. Det du velger, får du.

Når du har valgt en dør, avslører programlederen innholdet bak en av de andre to dørene. Siden programlederen vet hva som skjuler seg bak alle dørene, åpner han en dør hvor det befinner seg ei geit. Nå spør programlederen deg om du vil bytte dør. De fleste vil nå tenke at det er lurt å holde på det man først hadde valgt. Man vil tro at det er like sannsynlig at det befinner seg en bil bak begge de to gjenstående dørene. Men så er ikke tilfelle. Faktisk dobler du sannsynligheten for å vinne bilen dersom du skifter dør. Vi illustrerer løsningen på neste side.

Sannsynlighet

La oss si at deltakeren i utgangspunktet valgte dør 1.

Dør 1	Dør 2	Dør 3	Resultat hvis deltakeren skifter dør	Resultat hvis deltakeren ikke skifter dør
Bil	Geit	Geit	Geit	Bil
Geit	Bil	Geit	Bil	Geit
Geit	Geit	Bil	Bil	Geit

Det er bare hvis bilen befinner seg bak dør 1 at man taper ved å skifte dør.

La oss si at du valgte dør 1.

Dør 1	Dør 2	Dør 3	Resultat hvis du skifter	Resultat
hvis du holder på ditt opprinnelige valg				
Bil	Geit	Geit	Geit	Bil
Geit	Bil	Geit	Bil	Geit
Geit	Geit	Bil	Bil	Geit

En annen enkel måte å se det på er at å skifte bare taper dersom du har valgt bilen i ditt opprinnelige valg. Og siden det bare er 1/3 sjanse for at du har gjort nettopp det, er det 2/3 sjanse for at du vinner bilen ved å bytte dør.

Sannsynlighet

Stikk	Lenke	Artikkel
Forelle	http://www.flickr.com/photos/sherlymabck/5249078470/sizes/o/photoset.html	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Forelle.jpg
Ho	http://www.flickr.com/photos/foos2457141892/sizes/o/photoset.html	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ho.jpg
Jule	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Christmas.jpg	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jule.jpg
Spik	http://www.flickr.com/photos/ghilene/141582173/sizes/o/photoset.html	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spik.jpg
Krae	http://www.flickr.com/photos/thomashedbeck/40700990/sizes/o/photoset.html	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Krae.jpg
Terninge	http://www.flickr.com/photos/sherlymabck/5247200490/o/photoset.html	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Terninge.jpg
Ampeke	http://www.flickr.com/photos/843e3d433989403474264/sizes/o/photoset.html	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ampeke.jpg
Takt	http://www.flickr.com/photos/304881363092907/sizes/o/photoset.html	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Takt.jpg
Tag	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:MSB_Class_78_011_inset_Tagsen.jpg	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tag.jpg
Par	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Two_wildems_July1907.jpg	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Par.jpg
Terning	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Die_walder_dice.png	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Terning.jpg
Terninge	http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Die_dice	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Terninge.jpg
Krae	http://www.norges-bank.no/	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Krae.jpg
Anale 8	www.povintend.com	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Anale_8.jpg
Get eller til	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kontor_saker.jpg	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Get_eller_til.jpg
Lobe	http://www.norbi-forsing.no/wiki/Kategori:Kontor_saker	http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lobe.jpg