

Primtall



Bilde: Sikade av arten magicicada.

Primtall

- Primtall regnes som matematikkens byggesteiner.
- De beskrives som naturens viktigste tall.
- Matematikere har studert og forsket på primtallene i over to tusen år.

Primtall er naturlige tall som er større enn 1 og som bare er delelige med 1 og seg selv.

5

5 er et primtall. Det er større enn 1 og kan bare deles med 1 og seg selv.



$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

Primtall regnes som matematikkens byggeklosser. De beskrives som naturens viktigste tall og som matematikkens svar på atomene. De er rett og slett de grunnleggende elementene i faget. Å studere og forske på primtall har fascinert matematikere i flere tusen år. Mange har fundert på om det finnes uendelig mange primtall, og det har også blitt forsket på hvorfor det blir færre primtall jo høyere vi beveger oss blant tallene. Mange har arbeidet med å finne ut om primtallene følger et mønster, samtidig som det nærmest har vært en sport å finne det største primtallet.

Før vi går videre må vi selvsagt si noe om hva et primtall er. Kort sagt er primtall naturlige tall som er større enn 1 og som bare er delelige med 1 og seg selv.

Primtall

- Grekeren Evklid regnes som en viktig bidragsyter på flere matematiske områder.
- Evklid var den første som studerte primtall.

Evklid beviste at det finnes uendelig mange primtall.



Den greske matematikeren Evklid (325-265 f.Kr.) regnes som en viktig bidragsyter på en rekke områder, også når det gjelder kunnskapen omkring primtall. Om Evklid vet vi at han var fra byen Alexandria hvor han også arbeidet, samt at han studerte matematikk i Athen. Evklid systematiserte og samlet sammen det meste av matematisk kunnskap som fantes i samtiden. Hans verker ble helt fram til nyere tid brukt som lærebøker innenfor matematiske studium. Når det gjelder kjennskapen til primtall, hevdes det at Euklid var tidlig ute med å skaffe viten også på dette området. Det påstås at Evklid beviste at det ikke finnes noe største primtall. I følge Evklid kunne man alltid finne minst ett som var større.

Primtall

- Vi vet at primtall er naturlige tall som er større enn 1 og som bare er delelige med 1 og seg selv.
- Tallet 1 regnes dermed ikke som primtall.
- Tallet 2 er det eneste partallet som er primtall.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Over se du tallene mellom 1 og 20. Hvilke av disse er primtall?

Primtall er som tidligere nevnt naturlige tall som er større enn 1 og som bare er delelige med 1 og seg selv. Tallet 1 er imidlertid ikke definert som primtall. 2 regnes derfor som det minste primtallet. 2 er også det eneste partallet som er primtall, noe vi lett kan forstå i og med at alle andre partall er delelige med 2.

Vi kan ta for oss tallene mellom 1 og 20 for å se hvilke av disse som er primtall.

Primtallene er 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 og 19

Siden alle primtall foruten 2 er oddetall, er det vanlig å kalle primtall med avstand på 2 for tvillingprimtall. Således blir 11 og 13 tvillingprimtall på samme måte som 17 og 19 er det.

Primtall

- Ved å skrive tallene mellom 2 og 100 i et rutenett, kan vi finne ut hvilke som er primtall.


	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Legend:

- Primtall
- Kan deles på 2
- Kan deles på 3
- Kan deles på 5
- Kan deles på 7

En enkel måte å finne ut hvilke tall som er primtall blant relativt små tall er å bruke en form for matematisk sil. Vi skriver tallene mellom 2 og 100 i et rutenett. Vi begynner med å markere ut alle tall som kan deles på 2 (foruten 2-tallet), altså alle partall. Deretter markerer vi alle tall som kan deles på 3 (foruten 3-tallet). Slik fortsetter vi til og med 7-tallet. De tallene som står igjen umarkert i rutenettet, i vårt tilfelle farget med lys blå, er primtall.

Primtall



Følger primtallene et bestemt mønster i tallrekken?

Nei. For å finne ut om et tall er et primtall eller ikke, må man lete og undersøke.

Du kan aldri stole på at et tall er et primtall før du har bevist det gjennom regning.

31
331
3331
33331
333331
3333331

Alle tallene over er primtall.

Betyr det at også 333333331 er et primtall?

Mange matematikere har forsøkt å finne ut om primtallene følger et bestemt mønster. Svaret er at primtallene opptrer ganske usystematisk i tallrekken. For å finne ut om et tall er et primtall må man derfor lete, teste og regne. Med primtallene kan man nemlig ikke ta noe for gitt. Grovt sett opptrer primtallene sjeldnere jo lenger opp i tallrekken man beveger seg, men heller ikke dette er en regel uten unntak. Således blir primtallene fremdeles noe av et mysterium i sin opptreden. Svaret på den lille oppgaven er at 333333331 ikke er et primtall. Det virker logisk at det skal være et mønster fra tallene over, men 333333331 er det samme som $17 \cdot 19607843$.

Primtall

- Ved å gange primtall med hverandre får vi sammensatte tall.
- Alle sammensatte tall er derfor et produkt av to eller flere primtall.



Det er derfor ganske forståelig at primtall kalles for matematikkens byggesteiner.

$$4 = 2 \cdot 2$$

Naturlige tall som ikke er primtall kaller vi for sammensatte tall. Sammensatte tall skiller seg fra primtallene ved at de er delelige med flere tall enn 1 og seg selv. Vi kan si at alle sammensatte tall er et produkt av to eller flere primtall. Dette betyr at vi kan gange primtall med hverandre og få sammensatte tall.

Primtall

4, 6, 8, 9,
10, 12,
14, 15, 16,
18, 20

Hvilke primtall er de sammensatte tallene du ser her produkter av?

Vi tar for oss de sammensatte tallene mellom 1 og 20. Disse er 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 og 20

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$6 = 3 \cdot 2$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$9 = 3 \cdot 3$$

$$10 = 5 \cdot 2$$

$$12 = 3 \cdot 2 \cdot 2$$

$$14 = 7 \cdot 2$$

$$15 = 5 \cdot 3$$

$$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$$

$$20 = 5 \cdot 2 \cdot 2$$

Når vi skriver 6 som $3 \cdot 2$ har vi faktorisert 6. Vi skriver 6 som et produkt av faktorene 3 og 2.

Primtall

- På 1700-tallet levde det en tysk matematiker som het Christian Goldbach.
- Han påstod at alle partall større enn 2 kunne skrives som summen av to primtall.
- Denne påstanden er kjent som Goldbachs formodning.

$$\begin{aligned}4 &= 2 + 2 \\6 &= 3 + 3 \\8 &= 3 + 5 \\10 &= 3 + 7 \\12 &= 5 + 7 \\14 &= 3 + 11\end{aligned}$$

Selv i dag arbeider matematikere med å finne ut om Goldbachs påstand er riktig eller ikke.



På 1700-tallet levde det en tysk matematiker som het Christian Goldbach. Han interesserte seg for primtall, og påstod at alle partall større enn 2 kan skrives som summen av to primtall. Påstanden er kjent som Goldbachs formodning. Blant små tall er dette lett å kontrollere. $4 = 2 + 2$. $6 = 3 + 3$. $8 = 3 + 5$.

Det virker kanskje innlysende at Goldbachs påstand er riktig uansett hvilke partall vi undersøker, men det er et faktum at ingen har kunnet klare å bevise eller motbevise teorien. I det du leser dette arbeider mange superkraftige datamaskiner med dette uløste problemet. Det er derfor vi kaller det for Goldbachs formodning. Hva tror elevene? Kan alle partall skrives som summen av to primtall?

Merk: Siden det ikke eksisterer noe bilde av Goldbach, har vi brukt en illustrasjon fra 1700-tallet.

Primtall

- En del matematikere arbeider for å finne stadig større primtall.
- I 2009 klarte man å finne et primtall med 10 millioner sifre.
- Premien for å finne dette primtallet var 100 000 dollar.

Har du lyst til å tjene 250 000 dollar?
Det får du hvis du klarer å finne et
primtall med 1 milliard sifre.



Matematikere og andre primtallentusiaster vil nok alltid konkurrere i å finne det største primtallet. Slike arbeider er nærmest en sport, og det er også slik at det utloves pengepremier til den som klarer å slå den gjeldende rekorden. I lang tid var det om å gjøre å være førstemann til å klare å finne et primtall med minst 10 millioner sifre. Den amerikanske organisasjonen *Electronic Frontier Foundation* (EFF) utlovt 100 000 dollar til «finneren», og i 2008 bar arbeidet omsider frukter for et samarbeidsprosjekt hvor flere hundre datamaskiner har arbeidet kontinuerlig i flere år. EFF har nå lovt ut henholdsvis 150 000 og 250 000 dollar til den eller de som finner primtall med 100 millioner og 1 milliard sifre.

Primtall

- Primtall er viktige når informasjon skal utveksles.
- Når vi kjøper varer på internett eller betaler regninger i nettbanken, benyttes ofte primtall som nøkler til en hemmelig lås.



Koder laget av store primtall er nesten umulige å knekke.

Visste du at primtall er en viktig del av den moderne hverdagen? I dag benytter de fleste av oss internett når vi skal utføre banktjenester, og kanskje bruker du også nettets store utvalg til å handle både varer og tjenester. Takket være primtall kan vi være rimelig trygge på at netthandel og banktransaksjoner foregår på en slik måte at privat informasjon ikke blir tilgjengelig for uvedkommende. Det er nemlig slik at primtall fungerer som nøkler til en lås, og siden tallene består av et stort antall siffer, er dette nærmest umulige koder å knekke.

Likedan benyttes primtall når konfidensiell informasjon skal utveksles innenfor for eksempel helsevesenet. Når kun avsender og mottaker har tilgang til å vite hvilke primtall som er benyttet, sørger dette for at det blir svært vanskelig for uvedkommende å få tilgang til informasjonen.

Primtall

- Også i naturen spiller primtallene en rolle.
- Det finnes insekter som har tilpasset seg et liv hvor primtallene 13 og 17 har stor betydning.
- Enkelte sikader lever som larver under jorden i enten 13 eller 17 år.
- Deretter kommer de opp av jorden for å pare seg.



Man tror at syklusene på 13 og 17 år bidrar til at færre sikader blir spist av rovdyr.

Det finnes ikke så mange eksempler på at primtall spiller en sentral rolle i naturen, men et påfallende eksempel finner vi i insektverdenen. Her eksisterer det sikader som har tilpasset seg et liv hvor primtallene 13 og 17 har stor betydning. Disse sikadene lever under jorden som larver mens de suger til seg næring, vokser og skifter hud. Etter 13 eller 17 år kommer et stort antall sikader opp av jorden for å pare seg. Årsaken til at de følger 13 eller 17 års sykluser antar man er at dette er gunstig med tanke på å unngå å bli spist av bytteetere. Dersom disse har livssykluser på 2-3 år, samsvarer dette sjelden med sikadenes sykluser. På denne måten unngår de å møte rovdyr.

Primtall

- Kunstnere har også latt seg inspirere av primtall.
- Den franske komponisten Messiaen lagde musikk hvor primtall spilte en viktig rolle.
- Lengden på musikkens partier tilsvarte primtall.



I «vanlig» popmusikk bruker man ofte en takt som er oppdelt i fire deler, noe som ikke er et primtall.

Også innenfor kunsten finner vi at primtall har inspirert mennesker. Filmer har blitt laget omkring dette temaet, og også musikk har blitt komponert for å illustrere primtallenes uforutsigbarhet. Den franske komponisten Olivier Messiaen lagde musikk som bestod av partier hvis lengde tilsvarte primtall. På denne måten oppstod det uforutsigbare rytmer. Messiaen mente selv at musikken ble mer fri når dens deler var av ulik varighet.

Som en motsetning til Messiaens bruk av primtall innenfor musikk kan vi tenke oss det meste musikken vi hører til hverdags. Her er det som regel faste mønstre både når det gjelder rytme, takt og varighet. Hvis vi tar for oss en standard pop-låt vil vi sannsynligvis oppdage at hele komposisjonen er strammere regissert og oppbygd, og det er sjelden man blir overrasket over det man hører. Takten kan ofte være firedelt, altså 4 slag i takten. Hvert slag kalles for $\frac{1}{4}$ fordi $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

Printfall

Wiss.	Lehrer	Rechneter
Förster	http://www.vikpedia.org/wiki/File:20080701_12180607.jpg	http://de.wikpedia.org/wiki/maevik_foerster
Eckel	http://en.wikpedia.org/wiki/File:Edkdvon-Alexandra_1.jpg	http://en.wikpedia.org/wiki/maevik_eckel
Menzel	http://www.vikpedia.org/wiki/File:A164-09.jpg	http://en.wikpedia.org/wiki/maevik_menzel
Schade	http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/17/Medienjahr_09.jpg	http://de.wikicommons.org/wiki/maevik_schade23.deid.de
Colla	http://www.vikpedia.org/wiki/File:1_5_sand_12_Dallanden.jpg	http://de.wikicommons.org/wiki/maevik_colla20.deid.de
Goldbach	http://en.wikpedia.org/wiki/File:David_Geertz_by_Thomas_Samuelowich.jpg	http://de.wikimedia.org/wiki/File:Goldbach
Haede	http://www.flickr.com/photos/haede/2496214602/sizes/o/photobeam/	http://de.wikicommons.org/wiki/maevik_haede
Ando II	www.povworld.com	www.povworld.com